CLASE 17. Aplicaciones

El cálculo de residuos se puede usar en la evaluación de algunos tipos de integrales reales: trigonométricas e impropias.

17.1 Integrales Trigonométricas

Consideremos una integral de la forma $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, donde g es una función racional de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ que es acotada en el rango de integración. Haciendo la sustitución $z = e^{i\theta}$ y aplicando el Teorema de los Residuos (Teorema 16.16), se puede evaluar I. De las ecuaciones $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ y $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ (visto en ésta clase) se obtiene que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$ y $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Luego,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad |z| = 1$$

y así

$$I = \int_{|z|=1} g\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

donde C es la circunferencia $C_1(0)$ (recorrida en sentido anti-horario) y f es una función racional acotada en el rango de integración. Por el Teorema de los Residuos (Teorema 16.16),

$$I = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f(z), z_n),$$

siendo $z_1, z_2, \ldots, z_N$ los polos de $f(z)$ que se encuentran en la región interior del círculo unitario $|z| \leq 1$.

17.2 Integrales Impropias

Evaluaremos integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,\mathrm{d}x$ para cierta clase de funciones f.

Definición 17.1 (Función del orden $\mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$)**.** Sea p un número real. Se dice que una función f es del orden de $\frac{1}{z^p}$ (escribiremos $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$) si existe una constante real $k > 0$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{k}{|z|^p}$ cuando $|z|$ es suficientemente grande (es decir, cuando $|z| \geq M$ para alguna constante real $M > 0$).

Ejemplo 17.2. La función f definida por $f(z) = \dfrac{z^2+z-3}{3z^5+2z^2+9}$ se puede escribir como $f(z) = \dfrac{z^2(1+\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2})}{z^5(3+\frac{2}{z^3}+\frac{9}{z^5})}$, de donde se obtiene $|f(z)| = \dfrac{|z|^2}{|z|^5}\dfrac{\left|1+\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}\right|}{\left|3+\frac{2}{z^3}+\frac{9}{z^5}\right|}$, es decir, $|f(z)| \leq \dfrac{1}{|z|^3}$ cuando $|z|$ es suficientemente grande. Luego, $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^3})$.

Teorema 17.3. *Sea $f(z)$ una función meromorfa en el semiplano superior complejo y continua en el eje real. Si $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$ con $p > 1$ entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_n),$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_N$ representan los polos de $f(z)$ que están en el semiplano superior complejo.

Prueba. Denotemos con C_R la semicircunferencia superior $|z| = R$, $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Llamemos C la curva cerrada simple formada por C_R y el intervalo real $[-R, R]$, orientada en forma anti-horaria. Tomando R suficientemente grande (de modo que los polos de f que están en el semiplano superior queden todos en la región encerrada por C, como se muestra en la Figura 1) tenemos, gracias al Teorema de los Residuos (Teorema 16.16),

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}[f(z), z_n].$$

Ahora probaremos que $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

En efecto,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z\,| \leq \int_{C_R} \frac{k}{|z|^p}|\,\mathrm{d}z\,| = \int_{C_R} \frac{k}{R^p}|\,\mathrm{d}z\,|$$
$$= \frac{k}{R^p}\int_{C_R} |\,\mathrm{d}z\,| = \frac{k}{R^p}\pi R = \frac{k\pi}{R^{p-1}}.$$

Como $p > 1$, es $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ y, por lo tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}[f(z), z_n]$.

□

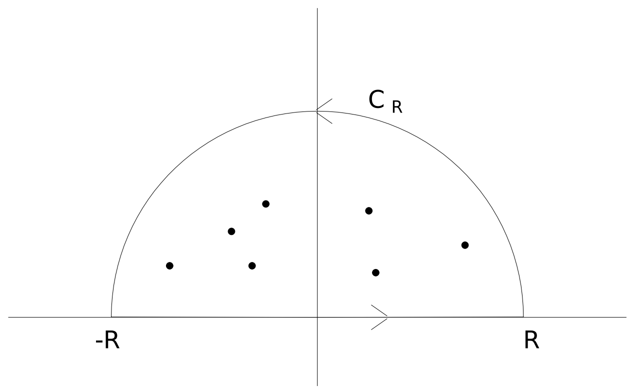

Figura 1: Todas las singularidades del semiplano superior quedan encerradas por C.

Las integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{d}x$ se evaluarán usando la integral de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\,\mathrm{d}x$, calculándole su parte real y su parte imaginaria (recuerde la Fórmula de Euler: $e^{imx} = \cos(mx) + i\,\mathrm{sen}(mx)$).

En la demostración del siguiente teorema usaremos dos resultados sencillos:

Lema 17.4 (Desigualdad de Jordan)**.** *Para cualquier* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *se cumple*

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \mathrm{sen}\,\theta \leq \theta.$$

Prueba. Considere las funciones reales $h(x) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\,x$ y $g(x) = x$, definidas en el intervalo real $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Como $g(x) \leq h(x)$ (puede graficar ambas funciones para verlo) entonces $\theta \leq \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$ y, en consecuencia, $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} \leq 1$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), de donde sigue la desigualdad de Jordan

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \mathrm{sen}\,\theta \leq \theta \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

□

Lema 17.5. *Para cualquier* $m \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$\int_0^{\pi} e^{m\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Prueba. La integral real $\int_0^{\pi} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$ la escribimos como

$$\int_0^{\pi} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

Usando la sustitución $\theta = \pi - t$ obtenemos

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{m \operatorname{sen}(\pi - t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen} t}\, dt.$$

Luego, sustituyendo obtenemos

$$\int_0^{\pi} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

$\square$

Teorema 17.6. *Consideremos una función $f(z)$ meromorfa en el semiplano superior tal que $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$, con $p > 0$. Entonces para cada número real $m > 0$ es*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)\, dz = 0,$$

siendo C_R como en la demostración del Teorema 17.3 (la semicircunferencia superior dada por $|z| = R$, $z(t) = R\, e^{it}$, $0 \le t \le \pi$).

Prueba. Para z en C_R, $z(t) = R\, e^{it} = R(\cos t + i \operatorname{sen} t)$. Así

$$\begin{aligned} \left|e^{imz}\right| &= \left|e^{imR(\cos t + i \operatorname{sen} t)}\right| = \left|e^{-mR \operatorname{sen} t}\right| \left|e^{imR \cos t}\right| \\ &= e^{-mR \operatorname{sen} t}. \end{aligned}$$

Como $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$, con $p > 0$, existen constantes reales positivas k y M tales que para $|z| \ge M$ es $|f(z)| \le \dfrac{k}{|z|^p}$. Tomando R suficientemente grande ($R > M$) se cumple que para z en C_R es $|f(z)| \le \dfrac{k}{R^p}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_R} e^{imz} f(z)\, dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} e^{im\, z(t)} f(z(t))\, z'(t)\, dt\right| \\ &= \left|\int_0^{\pi} e^{im\, z(t)} f(z(t)) Rie^{it}\, dt\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{im\, z(t)}\right| \, |f(z(t))| R\, dt \\ &\le \frac{k}{R^p} \int_0^{\pi} e^{-mR \operatorname{sen} t} R\, dt = \frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \operatorname{sen} t}\, dt, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe al lema anterior.

De la Desigualdad de Jordan (Lema 17.4) es $-\operatorname{sen} t \leq -\frac{2t}{\pi}$, por lo que la última integral nos queda

$$\frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\frac{2mR}{\pi})t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi k}{mR^p}(1 - e^{-mR}).$$

Luego, como $m > 0$ y $p > 0$ concluimos que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$ □

Teorema 17.7. *Sea $f(z)$ una función meromorfa en el semiplano superior y continua en el eje real. Si $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$ con $p > 0$ entonces para cada número real $m > 0$ es*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, z_n],$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_N$ denotan los polos de $f(z)$ que están en el semiplano superior.

Con el teorema 17.6, la prueba es similar a la del teorema 17.3, usando la curva cerrada $C = [-R, R] \cup C_R$.

Ejemplo 17.8. Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}$.

Solución. Usando las fórmulas indicadas

$$z = e^{i\theta}, \quad |z| = 1, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

se obtiene que

$$2 - \operatorname{sen}\theta = \frac{4iz - z^2 + 1}{2iz} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\,\mathrm{d}z}{4iz - z^2 + 1}.$$

Luego,

$$I = \int_{|z|=1} \frac{(-2)\,\mathrm{d}z}{z^2 - 4iz - 1} = -2 \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 4iz - 1}.$$

Factorizando, es $z^2 - 4iz - 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, con $z_1 = (2 - \sqrt{3})i$ y $z_2 = (2 + \sqrt{3})i$. El punto z_2 está en la región externa mientras que z_1 está en la región encerrada por $|z| = 1$.

Calculamos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f, (2 - \sqrt{3})i] &= \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i} (z - z_1)\left[\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}\right] = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{1}{(2 - \sqrt{3})i - (2 + \sqrt{3})i} = -\frac{1}{2\sqrt{3}i},\end{aligned}$$

con lo cual

$$I = (-2)2\pi i \operatorname{Res}[f, z_1] = (-2)(2\pi i)\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ejemplo 17.9. Calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos\theta)^n e^{in\theta}}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Solución. Con las fórmulas correspondientes

$$\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad |z| = 1,$$

será

$$1 + 2\cos\theta = \frac{z^2+z+1}{z} \quad \text{y} \quad 5 - 4\cos\theta = -\frac{2z^2-5z+2}{z}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{|z|=1} \frac{\frac{(z^2+z+1)^n}{\cancel{z^n}}\cancel{z^n}}{\frac{2z^2-5z+2}{\cancel{z}}}\frac{\mathrm{d}z}{i\cancel{z}} \\
&= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+z+1)^n}{2z^2-5z+2}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+z+1)^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

El punto $z_1 = \frac{1}{2}$ está adentro, en la región interior a $|z| = 1$ y el punto $z_2 = 2$ está afuera. Calculamos

$$\operatorname{Res}\left[f, \frac{1}{2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(z^2+z+1)^n}{z-2} = \frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)^n}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

De aquí

$$\begin{aligned}
I &= \left(-\frac{1}{2i}\right)2\pi i \operatorname{Res}\left[f, \frac{1}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2i}\right)2\pi i\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)^n \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ejemplo 17.10. Calcular $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

Solución. La función $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)(z^2+1)^2}$ es meromorfa en el semiplano superior con polos $z = 3i$ (polo simple) y $z = i$ (polo doble). Además, $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p}) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^6})$, con $p = 6 > 1$ y f es continua en el eje real. Aplicando el teorema correspondiente (Teorema 17.3) es $I = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, 3i) + \mathrm{Res}(f, i)]$. Calculamos

$$\mathrm{Res}(f, 3i) = \lim_{z\to 3i}\left[\frac{1}{(z+3i)(z^2+1)^2}\right] = \frac{1}{6\cdot 64i}$$

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z^2+9)(z+i)^2}\right] = \frac{3}{128}\frac{1}{i}.$$

Luego,

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{6\cdot 64} + \frac{3}{128}\right]\frac{1}{i} = \frac{5\pi}{2^5 3}\left(=\frac{5\pi}{96}\right).$$

Ejemplo 17.11. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$

Solución. Para aplicar el teorema correspondiente (Teorema 17.7), calculamos $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$ $(m = 1)$.

Vemos que $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ es del orden de $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^4})$. Además, f es meromorfa en el semiplano superior, con polo doble en $z = 2i$ y continua en el eje real. Calculamos

$$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, 2i] = \lim_{z\to 2i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right] = -\frac{3}{32}ie^{-2}.$$

Luego, $I = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)\,e^{iz}, 2i] = \dfrac{3\pi}{16}e^{-2}$. Tomando parte real es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}(I) = \frac{3\pi}{16}\,e^{-2}.$$